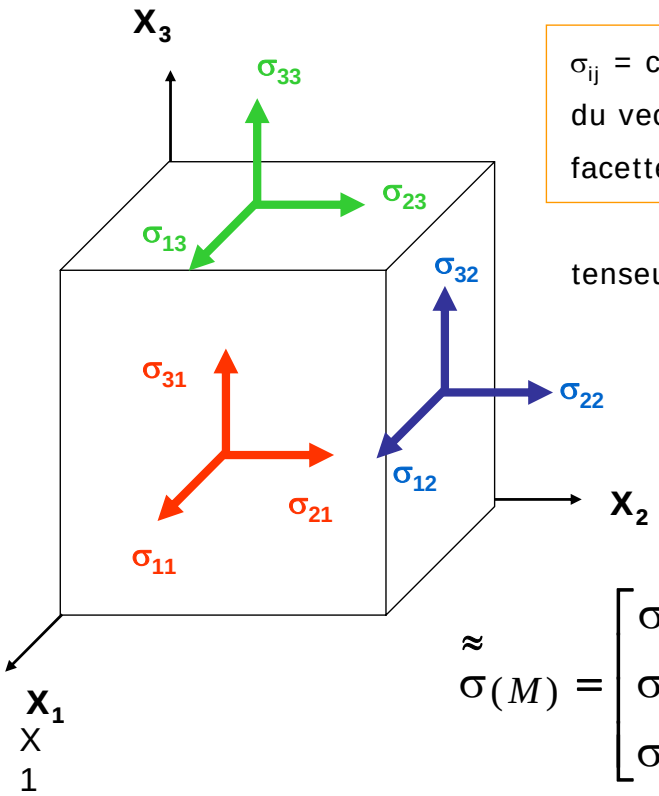
CHAMP DE CONTRAINTE ELASTIQUE A LA POINTE D'UNE FISSURE

Claude ROBIN
Ecole des Mines de Douai
Mai - décembre 2010

Champ de contrainte élastique à la pointe d'une fissure

- Rappels d'élasticité
- Résolution des problèmes plans par les fonctions analytiques
- Expressions générales
- Autres exemples

Tenseur des contraintes



σ_{ij} = composante suivant $\vec{e}_i$ du vecteur contrainte sur la facette de normale $\vec{e}_j$

tenseur symétrique

$$\overset{\approx}{\sigma}(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Tenseur des déformations

- Ce tenseur est également un tenseur symétrique

$$\overset{\approx}{\varepsilon}(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)$$

Cas particulier des états plans

- État plan de contraintes

$$\overset{\approx}{\sigma}(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  - Le tenseur des déformations s'écrit alors

$$\overset{\approx}{\varepsilon}(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

Cas particulier des états plans

- État plan de déformation

$$\overset{\approx}{\varepsilon}(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  - Le tenseur des contraintes s'écrit alors

$$\overset{\approx}{\sigma}(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Résolution d'un problème d'élasticité

- Etant donné un solide soumis :
  - à des forces ou à des déplacements sur sa surface extérieure
  - à des forces de volume,
- on cherche à connaître en chaque point :
  - le tenseur des contraintes
  - le tenseur des déformations
  - le vecteur déplacement
- Les équations expriment les différentes relations entre :
  - les contraintes σ_{ij}
  - les déformations ε_{ij}
  - les déplacements u_i
- Système d'équations aux dérivées partielles établi à partir :
  - des équations d'équilibre
  - des équations de compatibilité
  - de la loi de comportement (loi de Hooke)
- La résolution est obtenue par intégration du système précédent, compte tenu des conditions aux limites exprimées en terme de forces ou de déplacements sur la surface externe du solide

Les fonctions d'Airy

- Dans le cas de systèmes élastiques plans, les équations d'équilibre sont identiquement vérifiées en posant :

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2{}^2} + V \qquad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1{}^2} + V \qquad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} + V$$

  - Φ est la fonction d'Airy
  - V est un potentiel dont dérivent les forces volumiques

$$\vec{X} = -\overrightarrow{grad} V$$

- Dans le cas où <u>les forces volumiques sont négligeables</u>, on obtient :

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2{}^2} \qquad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1{}^2} \qquad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2}$$

- En combinant la loi de Hooke, la définition des déformations et des contraintes on montre que :

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x_1{}^4} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_2{}^4} + 2\frac{\partial^4 \phi}{\partial x_1{}^2 \partial x_2{}^2} = 0 \Leftrightarrow \nabla^2\left(\nabla^2 \phi\right) = 0$$

La solution de Westergaard

- Utilisation des fonctions analytiques
  - Si f(z) = α + iβ est une fonction analytique de la variable complexe z = x + iy , la différentielle de f(z) par rapport à z s'écrit :

$$\frac{df}{dz} = \frac{d\alpha}{dx} + i\frac{d\beta}{dx} = -i\frac{d\alpha}{dy} + \frac{d\beta}{dy}$$

  - les parties réelles et imaginaires d'une fonction analytique sont harmoniques. On dit que ce sont des fonctions harmoniques conjuguées.

$$\left\{\nabla^2\beta = \nabla^2\alpha = 0\right.$$

Application aux fonctions de contraintes complexes

- Soit une fonction complexe Z(z)=Re(Z)+i Im(Z) avec z=x+iy vérifiant les conditions de Cauchy-Riemann
- Westergaard définit une fonction analytique Z telle que :

$$\bar{Z} = \frac{d\bar{\bar{Z}}}{dz} \qquad Z = \frac{d\bar{Z}}{dz} \qquad Z' = \frac{dZ}{dz}$$

  - Ces quatre fonctions sont analytiques.
- Westergaard montre de plus que la fonction d'Airy, pour des problèmes de fissures dans une plaque plane de dimensions infinies, peut être définie par :

$$\Phi(x,y) = \mathrm{Re}\,\bar{\bar{Z}} + y\,\mathrm{Im}\,\bar{Z} - \frac{A}{2}\left(x^2 - y^2\right)$$

Expression des contraintes

- D'où l'on tire :

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \mathrm{Re}\,Z - y\,\mathrm{Im}\,Z' + A$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \mathrm{Re}\,Z + y\,\mathrm{Im}\,Z' - A$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -y\,\mathrm{Re}\,Z'$$

Expression des déplacements

- Expression des déplacements
  - En contraintes planes

$$u = \frac{1}{E}\left[\mathrm{Re}\,\overline{Z}(1-\nu) - y\,\mathrm{Im}\,Z(1+\nu)\right]$$

$$v = \frac{1}{E}\left[2\,\mathrm{Im}\,\overline{Z} - (1+\nu)y\,\mathrm{Re}\,Z\right]$$

  - En déformation plane

$$u = \frac{1+\nu}{E}\left[(1-2\nu)\mathrm{Re}\,\overline{Z} - y\,\mathrm{Im}\,Z\right]$$

$$v = \frac{1+\nu}{E}\left[2(1-\nu)\mathrm{Im}\,\overline{Z} - y\,\mathrm{Re}\,Z\right]$$

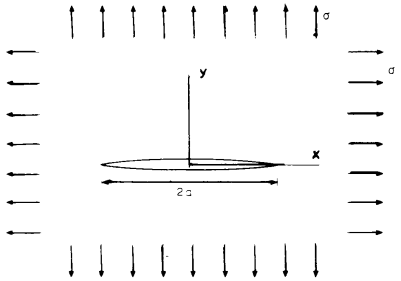
Résolution des problèmes plans par les fonctions analytiques : solution de Westergaard

- On utilise une fonction complexe de la forme : Z(z)=Re(Z)+i Im(Z)

$$\Phi(x,y) = \mathrm{Re}\,\bar{\bar{Z}} + y\,\mathrm{Im}\,\bar{Z} - \frac{A}{2}\left(x^2 - y^2\right)$$

$$Z = \frac{\sigma}{\sqrt{1-\left(\frac{a}{z}\right)^2}} = \frac{\sigma z}{\sqrt{z^2 - a^2}}$$

$$A = 0$$



- Conduisant aux expressions :

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta)$$

$$u_i = K\sqrt{\frac{2r}{\pi}} \quad g_i(\theta)$$

Développement du calcul

- Les conditions aux limites sont vérifiées car :
  - $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma$ et $\sigma_{xy} = 0$ loin de la fissure quand $z \to \infty$
  - $\sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0$ dans le plan de la fissure ($-a \le z \le +a$ et z réel)

- Les champs singuliers de contraintes et de déformations au voisinage du fond de fissure sont obtenus par développements limités au voisinage du fond de fissure :

$$z = a + \zeta \quad avec \quad \zeta = re^{i\theta}$$

Déroulement du calcul

- La fonction Z s'écrit alors :

$$Z(z)=\sigma\frac{z}{\sqrt{z^2-a^2}}=\sigma\cdot\frac{a+\zeta}{\sqrt{(a+\zeta)^2-a^2}}=\sigma\cdot\frac{a+\zeta}{\sqrt{\zeta(2a+\zeta)}}=\sigma\frac{a\left(1+\frac{\zeta}{a}\right)}{\sqrt{2\zeta a}\sqrt{1+\frac{\zeta}{2a}}}$$

$$Z(z)=\sigma\sqrt{\frac{a}{2\zeta}}\cdot\frac{1+\frac{\zeta}{a}}{\sqrt{1+\frac{\zeta}{2a}}}=\sigma\sqrt{\frac{a}{2\zeta}}\cdot\underbrace{\left(1+\frac{\zeta}{a}\right)\left(1+\frac{\zeta}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}}}\cong\sigma\sqrt{\frac{a}{2\zeta}}\cdot\left(1+\frac{\zeta}{a}\right)\left(1-\frac{\zeta}{4a}\right)$$

$$Z(z)=\sigma\sqrt{\frac{a}{2\zeta}}\left(1-\frac{\zeta}{4a}+\frac{\zeta}{a}-\frac{\zeta^2}{4a^2}\right)=\sigma\sqrt{\frac{a}{2\zeta}}+0\left(\sqrt{\frac{\zeta}{2a}}\right)$$

Termes négligés par la suite

- De même

$$Z'(z)=-\frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{a}{2}}\cdot\zeta^{-\frac{3}{2}}+0\left(\sqrt{\frac{a}{r}}\right)$$

Expression des fonctions

- Ce qui conduit à :

$$Z(z)=\sigma\sqrt{\frac{a}{2r}}\cdot e^{-i\frac{\theta}{2}}+\sigma\left(\sqrt{\frac{r}{a}}\cdot e^{i\frac{\theta}{2}}\right)=\sigma\sqrt{\frac{a}{2r}}\left(\cos\frac{\theta}{2}-i\sin\frac{\theta}{2}\right)+0\left(\sqrt{\frac{r}{a}}\right)$$

$$Z'(z)=-\frac{\sigma}{2r}\sqrt{\frac{a}{2r}}\left(\cos\frac{3\theta}{2}-i\sin\frac{3\theta}{2}\right)+0\left(\sqrt{\frac{a}{r}}\right)$$

- D'où :

$$\mathrm{Re}\,Z=\sigma\sqrt{\frac{a}{2r}}\cos\frac{\theta}{2}+0\left(\sqrt{\frac{r}{a}}\right)$$

$$\mathrm{Re}\,Z'=-\frac{\sigma}{2r}\sqrt{\frac{a}{2r}}\cos\frac{3\theta}{2}+0\left(\sqrt{\frac{a}{r}}\right)$$

$$\mathrm{Im}\,Z'=\frac{\sigma}{2r}\sqrt{\frac{a}{2r}}\sin\frac{3\theta}{2}+0\left(\sqrt{\frac{a}{r}}\right)$$

résultats

- Valeurs des contraintes

$$\sigma_{xx} = \mathrm{Re}Z - y\,\mathrm{Im}Z' \quad = \sigma\sqrt{\frac{a}{2r}}\cos\frac{\theta}{2}\left[1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right]+0\left(\sqrt{\frac{r}{a}}\right)$$

$$\sigma_{yy} = \mathrm{Re}Z + y\,\mathrm{Im}Z' \quad = \sigma\sqrt{\frac{a}{2r}}\cos\frac{\theta}{2}\left[1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right]+0\left(\sqrt{\frac{r}{a}}\right)$$

$$\sigma_{xy} = -y\,\mathrm{Re}Z' \quad = \sigma\sqrt{\frac{a}{2r}}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}+0\left(\sqrt{\frac{r}{a}}\right)$$

$$\boxed{\sigma_{ij} = \frac{\mathrm{K}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta)}$$

- Valeurs des déplacements

$$\boxed{u_i = \mathrm{K}\sqrt{\frac{2r}{\pi}}\, g_i(\theta)}$$

Expressions générales

- Contraintes en fond de fissure sollicitée en mode I

$$\sigma_{xx} = \frac{\mathrm{K_I}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left[1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right]$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\mathrm{K_I}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left[1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right]$$

$$\sigma_{xy} = \frac{\mathrm{K_I}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}$$

Expressions générales

- Contraintes en fond de fissure sollicitée en mode II

$$\sigma_{xx} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{\theta}{2}\left[2 + \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right]$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2}\left[1 - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right]$$

Expressions générales

- Contraintes en fond de fissure sollicitée en mode III

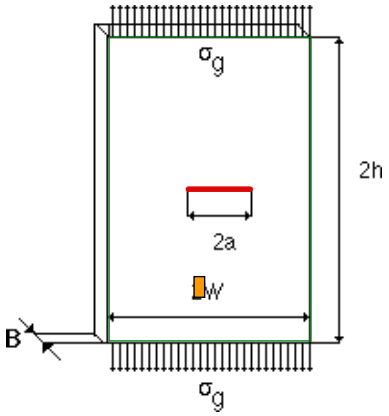
$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = 0$$

$$\sigma_{xz} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{\theta}{2}$$

$$\sigma_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2}$$

Quelques exemples

- Plaque à fissure centrale

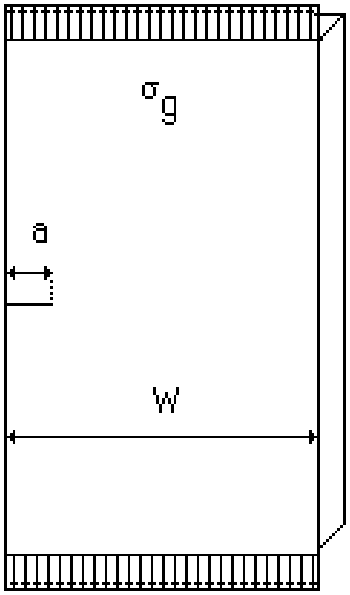


$$K_1 = \beta \sigma_g \sqrt{\pi a}$$

$$\beta = 1 + 0.256\left(\frac{a}{W}\right) - 1.152\left(\frac{a}{W}\right)^2 + 12.200\left(\frac{a}{W}\right)^3$$

Quelques exemples

- Plaque à fissure latérale

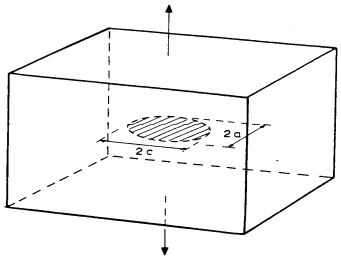


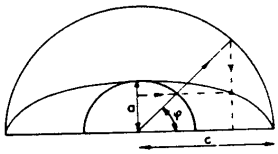
$$K_1 = \beta \sigma_g \sqrt{\pi a}$$

$$\beta = 1{,}12 - 0{,}23\frac{a}{W} + 10{,}56\left(\frac{a}{W}\right)^2 - 21{,}74\left(\frac{a}{W}\right)^3 + 30{,}42\left(\frac{a}{W}\right)^4$$

Quelques exemples

- Cas d'une fissure elliptique noyée



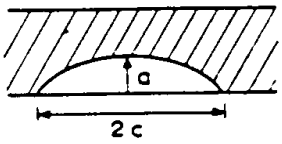


$$K_I = \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\Phi}\left(\sin^2\varphi\,\frac{a^2}{c^2}\cos^2\varphi\right)^{1/4}$$

$$\Phi = \int_0^{\pi/2}\left[1-\frac{c^2-a^2}{c^2}\sin^2\varphi\right]^{\frac{1}{2}} d\varphi$$

Quelques exemples

- Cas d'une fissure elliptique débouchante :



  - Zone plastifiée négligeable

$$K_I = 1{,}12\,\frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\Phi}\left(\sin^2\varphi + \frac{a^2}{c^2}\cos^2\varphi\right)^{1/4}$$

  - Zone plastifiée non négligeable

$$K_I = 1{,}12\,\frac{\sigma\sqrt{\pi\left(a + r_p^*\right)}}{\Phi}\left(\sin^2\varphi + \frac{a^2}{c^2}\cos^2\varphi\right)^{1/4}$$

Autres méthodes

- Méthodes de calcul
  - Principe de superposition
  - Fonctions de poids
- Méthodes expérimentales
  - Méthode de moiré
  - Photoélasticimétrie
- Méthodes numériques
  - Calcul par éléments finis

Merci de votre attention…

Claude ROBIN
claude.robin@mines-douai.fr